

# Непостижимая эффективность физики в биологии<sup>1</sup>

Алексей Буров и Алексей Цвелик

Даны оценки числа "жизненных" ограничений на релевантные физические константы и количества этих констант — в физике вообще, и в химическом секторе в частности. Предложен метод оценки априорной вероятности совместности этой системы неравенств. Показано, что эта система в указанном смысле переопределена: априорная вероятность ее совместности чрезвычайно мала, особенно в химическом секторе. Это означает, что структура физических законов еще более непостижимо-чудесна, чем полагали Альберт Эйнштейн и Юджин Вигнер.

## I. Введение

Тонкая настройка Вселенной для жизни означает сильную зависимость физической возможности жизни от фундаментальных характеристик Вселенной, «в частности, от формы законов природы, от значений некоторых констант природы и от аспектов состояния Вселенной на самых ранних этапах ее существования» [1]. Такая формулировка проблемы тонкой настройки имеет давнюю историю, восходящую к ранним аргументам от замысла; историческое обсуждение см., например, в [1, 2]. Среди трех перечисленных выше фундаментальных характеристик Вселенной — формы законов, значений фундаментальных констант и начальных условий Большого взрыва — наименьшее внимание, в плане тонкой настройки, до сих пор уделялось первой, а именно структуре самих законов. Насколько нам известно, это внимание в основном ограничивалось обсуждением необходимости слабого взаимодействия — вопроса, который и поныне остается дискуссионным [3-5]. В настоящей заметке мы предлагаем новый взгляд на роль структуры физических законов в проблеме настройки на жизнь.

В обсуждениях этой настройки до сих пор молчаливо предполагалось, что следующая из таких рассмотрений система ограничений совместна. На первый взгляд, проблематизация такого допущения может показаться странной: в конце концов, само наше присутствие в этом мире есть лучшее свидетельство такой совместности. Однако вопрос состоит не в том, существуют ли решения системы ограничений, а в том, благодаря чему они существуют. Достигается ли выполнение требований тонкой настройки исключительно подходящим выбором фундаментальных констант — настраиваемых «ручек» законов и начальных условий Вселенной — или же оно

---

<sup>1</sup> Авторский перевод препринта Unreasonable Effectiveness of Physics in Biology, <https://arxiv.org/pdf/2604.03835>.

возможно лишь благодаря весьма специальной структуре законов, тому, что эта структура каким-то образом отобрана для этой цели?

Мы можем посмотреть на систему необходимых для жизни требований как на математическую систему неравенств, где варьируемыми переменными являются безразмерные физические константы, и, отвлекаясь от нашего знания о существовании решений, задаться вопросом об априорных условиях такого существования. С этой точки зрения, интуитивно ясно, что при количестве неравенств заметно превышающим количество переменных, априорная оценка вероятности существования решения низка, их скорее всего не будет. Если же решения в таком случае все же находятся, то это означает, что, скорее всего, неравенства специально подобраны под задачу обеспечения требуемых условий.

Математически мы подходим к этому вопросу в разд. II, где мы даем краткий обзор теории совместности систем неравенств, показывая, что оценка Ковера [6] на пороговое отношение числа неравенств к числу переменных является разумной верхней границей для широкого класса таких систем. Оценки такого рода, будучи по необходимости грубыми, позволяют уловить «масштаб проблемы», то есть порядок величины априорной вероятности того, что система большого числа неравенств допускает решение.

Далее, в разд. III мы применяем вероятностные формулы Ковера к совокупности ограничений тонкой настройки, которые можно найти в литературе. В результате мы заключаем, что априорная вероятность совместности этой системы неравенств чрезвычайно мала.

После этого, в разд. IV, мы отдельно рассматриваем сектор химических ограничений. Сужая фокус до связей биологически важной четверки атомов — водорода, углерода, азота и кислорода, — мы обнаруживаем, что для удовлетворения порядка сотни ограничений в нашем распоряжении имеется, по существу, лишь один масштабный параметр. В такой ситуации нет смысла говорить о тонкой настройке параметров-«ручек»: их практически нет. Необходимый для жизни атомный конструктор Лего в готовом виде задан лишь формой уравнения Шредингера и принципом Паули.

Такой анализ приводит нас к выводу, который, в духе Юджина Вигнера, выражен в заглавии этой работы. Наконец, в разд. V мы предлагаем целостный взгляд на характер законов природы, в котором настройка законов на жизнь и вигнеровская «непостижимая эффективность математики в естествознании» объединяются в единой концептуальной схеме принципа минимакса познаваемости законов.

## II. Переопределенные системы неравенств

В этом разделе мы кратко рассмотрим основные результаты модели Ковера [6], объясняя, почему ее можно применять для оценки сверху числа ограничений тонкой настройки, задаваемого совместностью системы.

Рассмотрим систему из  $N_c$  линейных однородных неравенств по  $N_v$  переменным  $x_i$ , где  $i = 1, 2, \dots, N_v$ , причем  $N_c \geq N_v$ , а коэффициенты  $b_{il}$  выбираются независимо из общего распределения вероятностей, симметричного относительно нуля:

$$\sum_i b_{il} x_i > 0, \quad l = 1, \dots, N_c.$$

Вероятность совместности такой системы была изучена в новаторской работе Ковера [6], где для неё был получен универсальный результат:

$$P(N_c, N_v) = 2^{-(N_c-1)} \sum_{k=0}^{N_v-1} \binom{N_c-1}{k}.$$

Из этой формулы, в частности, следует, что при отсутствии избыточных неравенств, когда  $N_c = N_v$ , система всегда совместна,  $P(N_v, N_v) = 1$ . Как только появляются лишние ограничения, при  $N_c - N_v > 0$ , совместность уже не гарантирована. Однако при большом числе переменных вероятность убывает с ростом  $N_c$  лишь постепенно, пока не достигается так называемый порог Ковера,  $N_c = 2N_v$ , при котором  $P(2N_v, N_v) = 1/2$ . За этой точкой вероятность совместности быстро падает, следуя вблизи порога гауссову закону:

$$P(2N_v + \Delta N, N_v) \approx \Phi\left(-\frac{\Delta N}{\sqrt{2N_v}}\right),$$

где  $\Phi$  — интегральная функция распределения нормальной величины.

Теперь обобщим постановку, допустив, что правые части ограничений являются ненулевыми случайными величинами  $a_l$ , также выбранными из одного и того же четного распределения вероятностей. Поскольку однородная задача Ковера инвариантна относительно масштабирования, любое ее решение можно умножить на достаточно большой множитель, чтобы получить решение соответствующей неоднородной задачи. Иными словами, свойства совместности остаются теми же, что и в однородном случае.

Это, в свою очередь, подсказывает еще одну возможную модификацию системы: фиксировать норму вектора,  $\|x\|$ . Тогда можно ввести нормированные переменные  $y = x/\|x\|$ , что фактически переопределяет все правые части одним и тем же множителем,  $a_l \rightarrow a_l/\|x\|$ . В пределе  $\|x\| \rightarrow \infty$  восстанавливаются однородные результаты Ковера, и порог совместности для  $N_c/N_v$  (так называемая емкость, *capacity*) тот же,  $\alpha = 2$ . В противоположном пределе,  $\|x\| \rightarrow 0$ , ограничение  $l$  становится тривиальным, если  $a_l < 0$ , и невыполнимым, если  $a_l > 0$ . Ограничения первого типа увеличивают емкость, тогда как ограничения второго типа уводят ее к нулю. После отбрасывания тривиальных ограничений остается некоторое число невыполнимых. Следовательно, в пределе малой нормы итоговый результат таков:  $\alpha \rightarrow 0$ , если только все  $a_l$  не отрицательны. В последнем случае, когда все ограничения становятся тривиальными,  $\alpha \rightarrow \infty$ .

Подобные задачи изучались и для однородных ограничений квадратичной формы. При предположениях о случайных матрицах, аналогичных тем, что используются в линейном случае, было найдено — ценой довольно сложных вычислений, — что соответствующая емкость существенно меньше коверовской величины,

$$\alpha \approx 1.1-1.3,$$

см., например, [7].

Сказанное наводит на гипотезу, что коверовская пороговая емкость,  $\alpha = 2$ , служит общей верхней границей совместности широких классов систем неравенств. Однако этот порог может быть превышен, когда система приближается к вырожденности, когда некоторые ограничения становятся избыточными, будучи логическими следствиями других. В таких случаях эффективное число независимых ограничений уменьшается, и формально определенная емкость в принципе может становиться сколь угодно большой.

В нашем анализе совместности ограничений тонкой настройки для жизни мы предполагаем, что такие эффекты вырожденности или избыточности пренебрежимо малы. Это предположение оправдано тем, что авторитетные статьи и монографии по тонкой настройке обычно обсуждают лишь нетривиальные требования, не выводющиеся друг из друга. В большинстве случаев каждое требование связано с отдельным физическим процессом, зачастую весьма специфичным именно для данного требования, так что сколько-нибудь существенная логическая зависимость между различными ограничениями представляется маловероятной. Что же касается возможности того, что емкость системы физических ограничений жизни понижена по сравнению с пределом Ковера, то этого, напротив, следует в некоторой степени ожидать — по крайней мере по причинам, аналогичным тем, что были проиллюстрированы выше на обсужденных примерах.

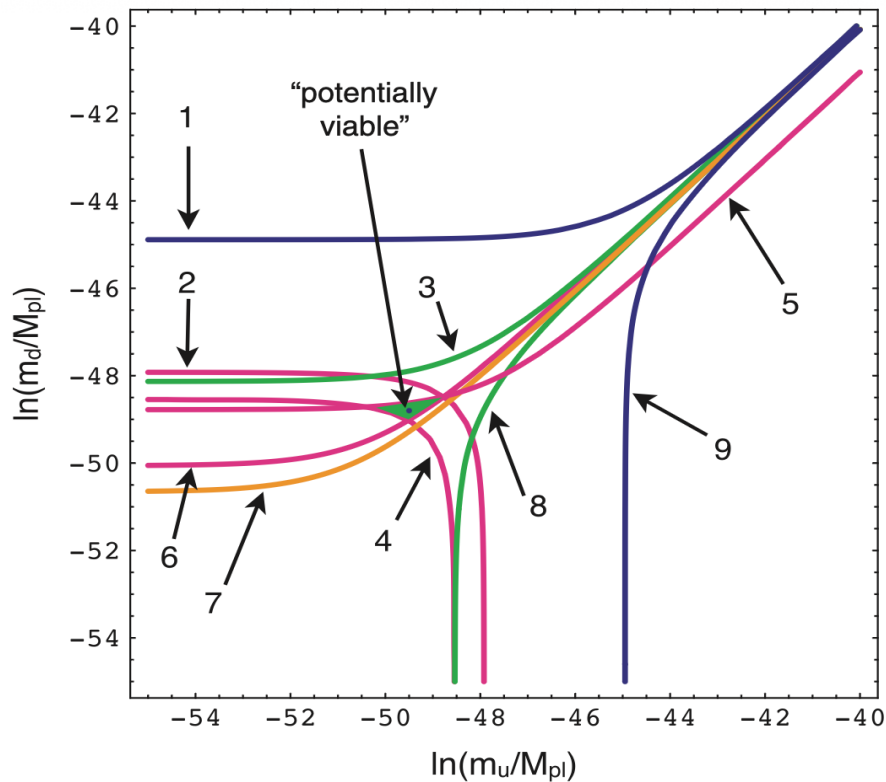
Таким образом, мы заключаем, что модель Ковера дает хорошо мотивированную верхнюю границу на число ограничений тонкой настройки, при котором совместность системы еще можно априори ожидать.

### III. Тонкая настройка: всё, кроме химии

В этом разделе мы оцениваем вероятность совместности обычных требований тонкой настройки, возникающих во всех областях физики и космологии, за исключением химии, которая будет рассмотрена отдельно в следующем разделе.

Наглядный пример возможной переопределенности представлен на рис. 1, заимствованном из [4]. На рисунке показаны девять ограничений тонкой настройки на массы двух самых легких кварков, из которых состоят протоны и нейтроны. Физический смысл этих ограничений объясняется в цитируемой литературе. Центральная зеленая область указывает, где все девять ограничений выполняются одновременно; ее малость наводит на мысль, что само существование потенциально жизнеспособной области весьма хрупко.

Заметим, что помимо двух кварковых масс, релевантные фундаментальные параметры, лежащие в основе девяти кривых, включают еще четыре ключевые константы Стандартной модели: три константы взаимодействия и массу электрона. Если бы по какой-то причине эти четыре параметра были фактически фиксированы, коверовский подход подсказывал бы, что система, скорее всего, переопределена: при  $N_v = 2$  и  $N_c = 9$  из формулы (2) получается вероятность совместности  $P = 0.035$ . Если же, напротив, эти четыре параметра действительно свободны, то рис. 1 представляет собой лишь двумерное сечение более высокоразмерного пространства параметров с  $N_v = 6$ . В этом случае порог Ковера равен  $N_c = 12$ , и априори система скорее совместна, чем нет.



**Рис. 1.** Границы ограничений, допускающих жизнь, для масс  $u$ - и  $d$ -кварков; вычислены в [8]. Стрелки (как изображено в [4]) показывают ту сторону каждой кривой, на которой соответствующее ограничение выполняется. Рисунок помещается с любезного позволения Стивена Барра.

Перейдем теперь к более общему анализу тонкой настройки в физике частиц и космологии. Начнем с того, что из примерно тридцати безразмерных фундаментальных констант физики лишь около дюжины,  $N_v = 12$ , в настоящее время входят в известные ограничения тонкой настройки [4, 9, 10]. Хотя единого канонического списка условий, допускающих жизнь, не существует, наша реконструкция на основе работ [2, 4, 9, 10] показывает, что число ограничений  $N_c \geq 60$ . Таким образом, число ограничений существенно превышает порог Ковера, что делает систему сильно переопределенной,  $P \lesssim 6 \cdot 10^{-7}$ . Есть все основания ожидать,

что число ограничений будет и дальше расти: уже выявленные требования останутся в силе, а к ним будут добавляться новые.

Отсюда естественно заключить, что не только примерно дюжина ключевых фундаментальных констант тонко настроена для жизни, но и сама структура физических законов оказывается поразительно специфичной — фактически устроенной так, чтобы допустить такую тонкую настройку при наличии лишь небольшого числа не predetermined теорией релевантных констант.

#### IV. Почти нечем настраивать: химия

Прежде всего определим, сколько релевантных безразмерных констант — «ручек» тонкой настройки — имеется в химическом секторе жизненных ограничений.

Химические свойства атомов и молекул определяются формально простым уравнением Шрёдингера и не содержащим параметров принципом Паули. Первое, по существу, есть нерелятивистское волновое уравнение для электронов в кулоновских полях друг друга и одного или нескольких ядер. Если перейти к атомным единицам, в которых заряд протона  $e$ , масса электрона  $m_e$  и постоянная Планка  $\hbar$  положены равными единице, то в главном порядке по малому релятивистскому параметру  $\alpha_e \equiv e^2/\hbar c$  (где  $c$  — скорость света), а также по малым отношениям массы электрона к массе протона и нейтрона уравнение Шрёдингера вообще не содержит свободных параметров; никаких ручек настройки нет вообще.

Следовательно, в главном порядке по этим малым параметрам все химические свойства — энергии и длины связей, а также дипольные моменты молекул — фиксированы с точностью до универсальных масштабных множителей. В этом смысле безразмерные величины — такие как отношения энергий связей, относительные размеры атомов и молекул, а также углы связей и другие факторы — вообще не масштабируются; они полностью определяются беспараметрическими формами нерелятивистского уравнения Шрёдингера и принципа Паули. Как сказано в [11], «Решения масштабированного электронного уравнения Шрёдингера представляют собой чистые числа, не зависящие от фундаментальных констант». Трудно представить себе более наглядный пример переопределенной системы, в которой требований много, а настраивать нечем, ручек настройки нет.

Сказанное, однако, требует некоторых оговорок:

- Возможность жизни связана с температурой. Необходимо, чтобы энергетический масштаб химических связей, задаваемый величиной  $m_e c^2 \alpha_e^2$ , был совместим с температурой окружающей среды  $T$ , что приводит к безразмерному температурному параметру  $\tau = T/(m_e c^2 \alpha_e^2)$ .
- Уравнение Шрёдингера для электронов в кулоновских полях друг друга и ядер пренебрегает релятивистскими эффектами. В следующем порядке по  $\alpha_e^2$  эти эффекты приводят к тонкой структуре — расщеплению кулоновских уровней

энергии вследствие спин-орбитального взаимодействия. Для легких атомов (H, C, N, O) это расщепление, однако же, биологически несущественно.

- В главном порядке химические расчеты можно проводить в приближении бесконечно тяжелых ядер. Однако для некоторых умеренно тяжелых ядер это приближение требует поправок, отражающих возможную роль колебательных степеней свободы молекул. Такие поправки связаны с отношением массы электрона к массе протона,  $\beta = m_e/m_p \ll 1$ . Отношение масс протона и нейтрона свободным химическим параметром не является, т. к. фиксируется ядерной физикой настолько близким к единице, что любые отклонения несущественны. Требования малости константы тонкой структуры и массового отношения,  $\alpha_e, \beta \ll 1$ , задаются космологией, ядерной и атомной физикой; см. [12], с. 167, 168.

Оценим теперь число ограничений, допускающих жизнь, в химическом секторе. Современная молекулярная биология выделяет 20 и более элементов, участвующих в жизненных процессах высших животных [13]. Однако для целей данной статьи достаточно ограничиться первыми четырьмя — водородом, углеродом, азотом и кислородом — и связями между ними. При наблюдаемых значениях  $\alpha_e \approx 1/137$  и  $\beta \approx 1/1800$  релятивистские эффекты и эффекты конечной массы ядра для этих элементов пренебрежимо малы; подробности см. в статье Р. Кинга с соавт. [11]. Чтобы сделать эти эффекты существенными, релятивистский и массовый параметр должны были бы превысить свои естественные значения на один-два порядка, что показано в обширных моделированиях [11]. Именно поэтому авторами делается вывод, что «выявленная здесь широкая чувствительность химии молекул, поддерживающих жизнь, к параметрам ( $\alpha_e, \beta$ ) не столь впечатляюща, как узкие ограничения на эти фундаментальные константы, установленные ранее в физике и космологии». Это не удивительно: если ограничения дружественности к жизни в главном порядке фиксированы уравнениями без параметров, вывод едва ли мог быть иным.

В пределах квартета атомов H, C, N и O имеется двенадцать биологически существенных ковалентных связей [14]: (N-H, O-H, C-H, C-C, C=C, C-N, C=N, C≡N, C-O, C=O, N-O, O-O), шесть водородных связей [15] (N-H...H, O-H...H, C-H...N, C-H...O, N-H...N, N-H...O), а также  $4 \cdot 5/2 = 10$  ван-дер-ваальсовых взаимодействий, что в сумме дает 28 различных связей.

Биологические требования накладывают на каждую из этих связей односторонние или двусторонние ограничения — на их энергии, равновесные длины, дипольные моменты и образуемые ими углы. Возникающее число неравенств по этим связям, по-видимому, имеет порядок сотни. Чтобы вероятность совместности системы из примерно сотни неравенств не была пренебрежимо мала, потребовалось бы по меньшей мере несколько десятков настраиваемых переменных, тогда как здесь имеется только одна — масштабный температурный множитель  $\tau$ .

Заметим, что элементы H, C, N и O, составляющие около 99% атомов человеческого тела, принадлежат к четырем различным химическим группам. Поэтому не следует

ожидать, что значительная доля неравенств окажется тривиальной; иными словами, не следует ожидать, что система будет сколько-нибудь существенно вырожденной.

Все биологически необходимые множественные требования на связи квартета важнейших атомов чудесным образом удовлетворены одними лишь беспараметрическими формами нерелятивистского уравнения Шредингера и принципа Паули. Мы не беремся считать число значимых связей всех остальных биологически релевантных атомов — наверное, их учет подбросит полное количество жизненных ограничений до нескольких сотен, если не до тысячи. И вот весь этот химический ансамбль настроен всего тремя параметрами — температурным, релятивистским и массовым.

В предыдущем разделе мы показали, что без некоторой степени «жизнелюбия» в структуре космологии и физики частиц имеющейся там дюжины доступных свободных констант недостаточно для удовлетворения более чем пяти десятков известных ограничений. Рассмотрение химического сектора ведет к тому же выводу еще более убедительным образом, показывая, что приблизительно  $N_c \simeq 100$  нетривиальных ограничений в его самой легкой части удовлетворяются при одном-единственном настраиваемом температурном параметре,  $N_v = 1$ .

Единственным правдоподобным объяснением столь поразительной возможности является крайне специальный характер физических законов, позволяющий удовлетворять множество ограничений «жизнелюбия» при малом числе настраиваемых свободных параметров. Иными словами, обнаруживается новое свойство структуры физических законов, которое, в духе Вигнера [16], вполне уместно назвать «непостижимой эффективностью физики в биологии».

## V. Заключение

Известные законы физики обнаруживают две фундаментальные и широко обсуждаемые особенности. Первая состоит в их математической простоте и структурной элегантности, лежащих в основе вигнеровской «непостижимой эффективности математики в естествознании» [16], познаваемости Вселенной в колоссальном диапазоне параметров и с исключительной точностью; см. дальнейшее развитие этой темы у Марка Штайнера [17]. Вторая, не менее поразительная особенность — это тонкая настройка констант этих законов для жизни во всем ее богатстве, включая разумную жизнь; см., например, [2, 9, 10, 12, 18, 19].

Структура физических законов как математических принципов симметрий, инвариантностей и т. д., традиционно связывалась с их познаваемостью, тогда как теоретически свободные, эмпирически определяемые константы законов с конца прошлого века привычно рассматривались в контексте обеспечения жизни; символически: структура  $\Rightarrow$  познаваемость (discoverability, comprehensibility), константы  $\Rightarrow$  жизнеспособность (viability, habitability).

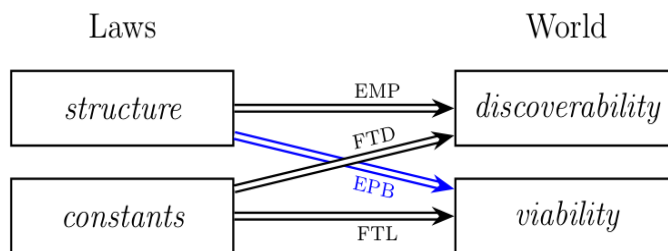
В дополнение к этим двум отношениям между математическими аспектами законов и возможностями физического мира Робин Коллинз выдвинул перекрестную

гипотезу, согласно которой фундаментальные константы законов тонко настроены не только на жизнь, но и на познаваемость этих законов [20]; символически: константы  $\Rightarrow$  познаваемость.

В настоящей работе мы стремимся продемонстрировать вторую, до сих пор не замечавшуюся перекрестную связь: структура  $\Rightarrow$  жизнеспособность. А именно, мы утверждаем, что сама возможность тонкой настройки констант в рамках математически простой и элегантной структуры законов представляется, в чисто математическом смысле, крайне маловероятной из-за напряжения между большим числом ограничений и непропорционально малым числом настраиваемых безразмерных параметров.

По существу, эта идея была выдвинута одним из нас (А.Т.) более десяти лет назад, дав название книге «Жизнь в невозможном мире» [21]; здесь же мы представляем эту идею количественно.

Принцип, объединяющий все перечисленные выше свойства законов, может быть выражен как минимум сложности, необходимой для их познаваемости [22]. Будь законы проще, тонкая настройка, поддерживающая жизнь, была бы маловероятна — более того, даже при нынешнем уровне сложности такая настройка выглядит математически неразрешимой задачей. Будь они сложнее, мы, возникшие в этом мире живые разумные существа, скорее всего, не смогли бы эти законы открыть — уже на нынешнем уровне сложности великие открытия физики совершались, судя по всему, на самом пределе возможностей наиболее одаренных первопроходцев.



**Рис. 2.** Связи между свойствами законов и способностями мира. EMP означает *Effectiveness of Mathematics in Physics* («эффективность математики в физике»), EPB — *Effectiveness of Physics in Biology* («эффективность физики в биологии», синяя стрелка, предложено в настоящей работе), FTL — *Fine-Tuning for Life* («тонкая настройка для жизни»), а FTD — *Fine-Tuning for Discoverability* («тонкая настройка для познаваемости»; предложено Р. Коллинзом [20]).

## Благодарности

Мы благодарны нашим давним собеседникам Михаилу Аркадьеву и Льву Бурову за многие вдохновляющие обсуждения и конструктивную критику. Мы особенно признательны Робину Коллинзу за его весьма ценные замечания.

## Литература

- [1] S. Friederich, *Fine-tuning*, *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (2020), <https://plato.stanford.edu/entries/fine-tuning/>.
- [2] J. D. Barrow and F. J. Tipler, eds., *The Anthropic Cosmological Principle* (Oxford University Press, New York, 1986).
- [3] R. Harnik, G. D. Kribs, and G. Perez, A universe without weak interactions, *Phys. Rev. D* **74**, 035006 (2006).
- [4] L. A. Barnes, The fine-tuning of the universe for intelligent life, *Publ. Astron. Soc. Aust.* **29**, 529 (2012).
- [5] E. Grohs, A. R. Howe, and F. C. Adams, Universes without the weak force: Astrophysical processes with stable neutrons, *Phys. Rev. D* **97**, 043003 (2018).
- [6] T. M. Cover, Geometrical and statistical properties of systems of linear inequalities with applications in pattern recognition, *IEEE Trans. Electron. Comput.* **EC-14**, 326 (1965).
- [7] C. Thrampoulidis, S. Oymak, and B. Hassibi, The gaussian min-max theorem in the context of convex optimization, *Found. Trends Signal Process.* **12**, 1 (2018).
- [8] S. M. Barr and A. Khan, Anthropic tuning of the weak scale and of  $m_u/m_d$  in two-higgs-doublet models, *Phys. Rev. D* **75**, 045002 (2007).
- [9] F. C. Adams, The degree of fine-tuning in our universe—and others, *Phys. Rep.* **807**, 1 (2019).
- [10] D. Sloan, R. A. Batista, M. T. Hicks, and R. Davies, eds., *Fine-Tuning in the Physical Universe* (Cambridge University Press, Cambridge, 2020).
- [11] R. A. King, A. Siddiqi, W. D. Allen, and I. H. F. Schaefer, Chemistry as a function of the fine-structure constant and the electron-proton mass ratio, *Phys. Rev. A* **81**, 042523 (2010).
- [12] J. D. Barrow, *The Constants of Nature: From Alpha to Omega—The Numbers That Encode the Deepest Secrets of the Universe* (Pantheon Books, New York, 2002).
- [13] K. Remick and J. D. D. Helman, The elements of life: A biocentric tour of the periodic table, *Adv. Microb. Physiol.* **82**, 1 (2023).

- [14] D. L. Nelson and M. M. Cox, *Lehninger Principles of Biochemistry*, 8th ed. (W. H. Freeman, New York, 2021).
- [15] G. A. Jeffrey, *An Introduction to Hydrogen Bonding* (Oxford University Press, New York, 1997).
- [16] E. Wigner, The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences, *Commun. Pure Appl. Math.* **13**, 1 (1960).
- [17] M. Steiner, *The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem* (Harvard University Press, London, 1998).
- [18] M. J. Rees, *Just Six Numbers: The Deep Forces That Shape the Universe* (Basic Books, New York, 2000).
- [19] L. A. Barnes and G. F. Lewis, *A Fortunate Universe: Life in a Finely Tuned Cosmos* (Cambridge University Press, Cambridge, 2016).
- [20] R. Collins, The argument from physical constants: The fine-tuning for discoverability, in *Two Dozen (or So) Arguments for God: The Plantinga Project*, edited by J. L. Walls and T. Dougherty (Oxford University Press, Oxford, 2018), pp. 89-107.
- [21] A. Tselik, *Life in the Impossible World* (in Russian) (Ivan Limbakh Publishing Company, SPb, Russia, 2012).
- [22] A. Burov and L. Burov, Genesis of a pythagorean universe, in *Trick or Truth? The Mysterious Connection Between Physics and Mathematics*, edited by A. Aguirre, B. Foster, and Z. Merali (Springer, Switzerland, 2016), pp. 157-171, arXiv:1411.7304 [physics.hist-ph].